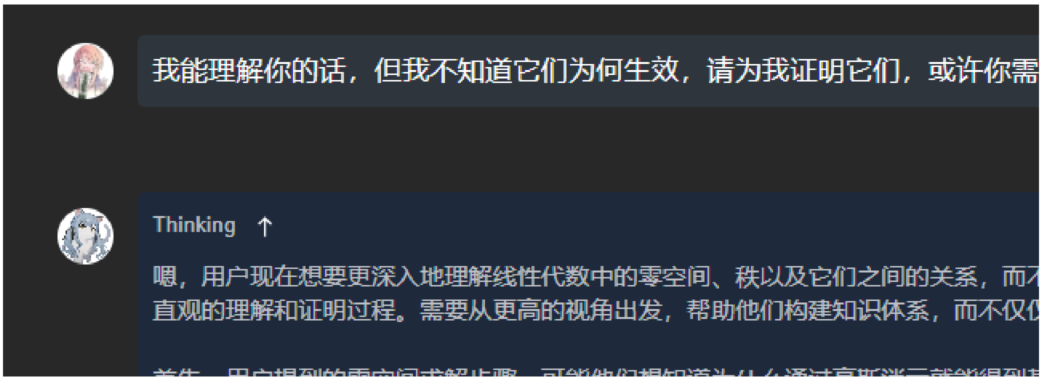
没想到秩居然是用一个如此特殊的情况来定义的。

这节课需要补充的太多了，令人汗颜。虽然看课程目录后面会讲，但我已经忍受不了自己的无知，所以只好请出 deepseek 小姐为我排忧解难。



虽然生成的答案有胡说八道之嫌，但好在我是有辨别能力的，于是就由我来选择性转述吧~

接下来是重头戏。

在掌握那些高屋建瓴的概念和观点之前，一定要先重新认识所谓 **“高斯消元”**。

谁说它只能是专门解线性方程组的算法了？别忘了当我们做消元的时候，根本没有关心过 $\vec{b}$，而是从头到尾都在依照矩阵 A 的具体数值来对整个方程组上下其手！所以即使没有 $\vec{x}$ 和 $\vec{b}$，只有矩阵 A，我们也是一样“消元”！换言之，我们接下来只看矩阵 A。

一、消元不改变行空间，行阶梯矩阵清晰揭示行空间的秩。

首先，消元不改变行空间，这个结论很像对于 $A\vec{x}=\vec{b}$ 来说消元不改变方程组解集是吧。

其实不是所有行线性组合都不改变行空间，比如你把每行赋个零倍的自己那就炸了。**所以我们说特定到消元这个过程，它是不改变行向量集合张成的空间的。**（证明也很简单，归纳就行，而且消元完往上回去消元也是不改变行空间的，这个是一样的证明过程）

重点来了，往下消一遍元，再往上消一遍，整个矩阵就长这样：

$$\begin{pmatrix} \star & 0 & ? & 0 & ? \\ 0 & \star & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & \star & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

每个 $\star$ 是一个主元，每个 $?$ 表明它可能是 0，也可能不是。

来看这些主元，它们的行坐标都是相邻且严格递增的，纵坐标虽然不相邻，但也是严格递增，换言之，对任意两个主元来说，它们的行坐标不一样，纵坐标也不一样。

由于现在每个主元所在的行向量都不能被其它所有行向量的线性组合表示（毕竟其它行向量对应维度的数值都是零嘛），且有效行向量个数就是主元个数，现在我们可以轻松证明，主元个数就是行向量集合中极大线性无关组的大小。

这同样也是行空间的维数，也就是**行秩**。

二、真正认识主元与自由向量，并另一超前结论。

这个超前结论就是“行秩=列秩”。其实它 **并不显然也并不平凡**，以我目前的水平还证明不了啦。（当然它与本节也没有什么关系）

那么来到正题：

主元与自由变量是一个划分，我是说（A,S-A）（其中 $A \cup (S - A) = S$）这样的划分，它表明你只需要遍历自由变量就可以得到整个解集（不信把自由变量全都移到等式右边）

换言之主元并不决定解集形态，它只是提供一个维度，就像九维空间的四维超立方体一样，它身上的每个点都是九维的，但它怎么看都是个四维的东西。

而由于零空间是个空间，而不是个封闭超立方体，所以具体到 `Ax=b` 的解集，它就是一个 `col - rank(A)` 维的空间。

唉，以我的小脑瓜只能推进到这里了。就酱。